آسیه رضائی‌گرجی
دبیر ریاضی شهرستان کرج

استدلال

مقدمه

ارسطو **کشف کرد که تمام فعالیت‌های ذهن بشر، علی‌رغم گستردگی و پیچیدگی آن، یا برای این است که تصورات مجهول را با اندوخته‌های تصوری‌اش روشن کند، و یا برای آن است که احکام و قضیه‌ها را آن‌گونه سازمان‌دهی کند که به نتایج جدید برسد و این یعنی «استدلال».**

شیوهٔ دیگر تفکر، استدلال است؛ نعمتی که خداوند بلندمرتبه از ابتدای زندگی انسان در اختیار او قرار داد. نوزاد به تدریج صداهای مختلف را می‌شنود، به اطراف خود می‌نگرد، پدر، مادر و اطرافیان خود را می‌بیند و... این احساسات بر اثر تکرار روی او تأثیر می‌گذارند و در ذهن او باقی می‌مانند.

استدلال کردن و دلیل آوردن عالی‌ترین فعالیت ذهن بشر است. بشر از همان دوران کودکی، پیش از آنکه چیزی را از جایی بیاموزد، با توجه به اطلاعاتی که در اختیار دارد، برای کارهایی که انجام می‌دهد دلیل می‌آورد و با طی‌کردن مسیر تکاملی لازم، می‌تواند استدلال‌های قوی‌تر و پیچیده‌تری را انجام دهد. بنابراین، استدلال فعالیت طبیعی ذهن آدمی است، اما گاهی در روند دلیل آوردن دچار اشتباهاتی می‌شویم که با شناخت دقیق استدلال، می‌توان از اشتباهات کاست و به بهره‌برداری سریع‌تر، درست‌تر و آسان‌تر دست یافت.

در تدریس درس‌هایی مانند «جبر و احتمال» و «هندسه»، مفاهیم مربوط به استدلال مطرح می‌شوند و در حین تدریس سؤالاتی برای دانش‌آموزان پیش می‌آید. بهتر دیدم که برای آشنایی آنان از کتاب‌های گوناگون منطق موجود استفاده کنم و این مفاهیم را برای آنان روشن سازم. به‌دلیل شیوا بودن و بی‌نقص بودن جملات موجود در این کتاب‌ها، سعی کردم که از جملات این کتاب‌ها غالباً بدون تغییر استفاده کنم. فهرست این کتاب‌ها را در پایان مقاله زیر عنوان منابع آورده‌ام.

تعریف استدلال

استدلال آن چیزی است که ذهن انسان در برخورد با دنیای اطراف خود انجام می‌دهد و پاسخ «چراهایی» است که برای او پیش می‌آید. تمام پیشرفت‌های علمی، اجتماعی، فلسفی و دینی به استدلال وابسته‌اند و تابع قوانینی هستند که ذهن انسان به‌طور طبیعی آن‌ها را به کار می‌برد. علم و ادراک انسان به دو دستهٔ «تصور» و «تصدیق» تقسیم می‌شود. نام دیگر تصدیق «قضیه» است. محتوای قضیه ممکن است از راه‌های گوناگونی چون احساس، تجربه، حدس علمی و قرارداد به‌دست آید.

استدلال عبارت‌است از: ترکیب قانونمند قضایای معلوم برای رسیدن به قضیهٔ جدید.

اقسام استدلال

انسان برای رسیدن به معلومات جدید معمولاً از سه نوع استدلال استفاده می‌کند: ۱. تمثیل؛ ۲. استقرا؛ ۳. قیاس.

۱. تمثیل

تمثیل در لغت به‌معنای مثال آوردن و یا تشبیه کردن چیزی به چیزی دیگر است. در تمثیل، حکمی را برای چیزی از راه شباهت آن چیز با چیز دیگر معلوم می‌کنند. به‌عبارت دیگر، وقتی دو چیز وجه اشتراک و یا وجه شباهتی داشته باشند، حکم می‌کنیم که در نتیجهٔ آن وجه اشتراک همانند خواهند بود. بنابراین، تمثیل نوعی استدلال است که در آن فقط به دلیل تشابهی که میان دو موضوع وجود دارد، حکم یکی را به دیگری نسبت می‌دهیم.

نخستین استدلال‌های کودکان از راه تمثیل است. استدلال تمثیلی در بسیاری از موارد مفید است، اما استدلال قابل اطمینانی نیست. زیرا گاهی وقت‌ها ممکن است نتایج غلطی به‌دست آید. در ادامه مثال‌هایی مطرح شده‌اند که بعضی از آن‌ها نتایج درستی نخواهند داشت:

۱. «چون آب و هوای کرهٔ مریخ مانند آب و هوای زمین است، حکم می‌کنیم مریخ هم مانند زمین دارای حیات است.»

۲. «چون دارویی روی میمون اثر خوبی دارد، حکم می‌کنیم که روی انسان نیز اثر خوبی دارد.»

۳. با فرض طبیعی بودن m و n به سادگی داریم: $a^m.a^n=a^{m+n}$ و حکم می‌کنیم:

$$\sqrt{a}.\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{7}{6}}=\sqrt[6]{a^7}$$

استدلال استقرایی، استدلالی است که در آن با مشاهده چند مورد جزئی، یک حکم کلی نتیجه می‌شود

مثال دیگری در زمینهٔ ریاضیات مطرح می‌کنیم و با اســتفاده از این استدلال به بررسی آن می‌پردازیم: می‌دانیم که «منفی ضرب در منفی» همواره مثبت اســت. برای اثبات، اگر شخصی عقب عقب راه برود که یک عمل منفی اســت و از او فیلم‌برداری کنیم، سپس فیلم را به صورت عقب‌عقب نشــان دهیم که این هم عملی منفی اســت، می‌بینیم که شخص به جلو حرکت می‌کند که یک عمل مثبت است.

بیشترین و مفیدترین استفاده از استدلال تمثیلی در امر آموزش، محاوره، شــعر و ادبیات است. بنابراین افرادی که در امر آموزش قرار می‌گیرند، تلاش می‌کنند با استفاده از تمثیل مطالب را بهتر و ساده‌تر به‌طرف مقابل خود انتقال و یا آموزش دهند.

تمثیل یعنی ســرایت دادن یک موضوع به موضوع دیگر، به‌دلیل مشابهت آن دو با هم.

در علوم تجربی نیز اســتدلال تمثیلی در القای فرضیه به ذهن عالِم حائز اهمیت اســت. برای مثال، **پاستور** متوجه شد که تخمیر مشروبات الکلی به‌سبب موجودات ریز جان‌دار است. او از راه تمثیل به این فرض رســید که ممکن اســت علــت بیماری‌های عفونی نیز ذرات ریز جان‌داری باشــد و با آزمایش‌های متعدد فرض خود را به اثبات رساند.

استقرا

اســتقرا در لغت به‌معنای جســت‌وجو و کاوش اســت. استدلال استقرایی، استدلالی است که در آن با مشاهدهٔ چند مورد جزئی، یک حکم کلی نتیجه می‌شــود؛ یعنی در آن ذهن انسان از جزئی به کلی سیر می‌کند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

- انسان در چند مورد جزئی آب را حرارت می‌دهد و می‌بینند که آب در صــد درجه به جوش می‌آید. نتیجه می‌گیرد که هر آبی در صد درجه به جوش می‌آید.
- تساوی‌های زیر را در نظر بگیرید:

۱۶=۷+۵+۳+۱ و ۹=۵+۳+۱ و ۴=۳+۱

فــرد با دیدن این چند مورد جزئی نتیجــه می‌گیرد که مجموع تعدادی عدد فرد متوالی با شروع از ۱، برابر است با مربع تعداد آن‌ها.

بنابرایــن نتیجهٔ یک اســتقرا به‌طور حتم یک قضیهٔ کلی اســت. استقرا بر دو قسم است:

۱. استقرای ناقص(ضعیف)؛ ۲. استقرای تام (قوی)

۱. استقرای ناقص (ضعیف)

افراد و یا چیزهایی که مورد استدلال قرار می‌گیرند، نامحدودند. ما در این اســتدلال، اگر تعدادی از آن‌ها را متصف به صفتی بیابیم و

آن‌گاه این حکم را تعمیم دهیم و بگوییم کل دارای این صفت است، از استدلال استقرایی ناقص استفاده کرده‌ایم. بنابراین در استقرای ناقص برخی از موارد جزئی را می‌آزمایند و سپس نتیجهٔ به‌دست آمده را به کل موارد سرایت می‌دهند.

در ریاضیات، فرض کنید P(n) ویژگی مشخصی (یا حکم یا گزاره‌ای) در مورد عدد طبیعی (یا حسابی) n باشد؛ برای مثال: $P(n): ۲^n \geq n$. این عبارت یعنی P(n) به معنی $۲^n \geq n$ باشد.

در ریاضیات این استدلال تحت‌عنوان اصل استقرای ضعیف مطرح می‌شود و به کار می‌رود. در اینجا به بیان این اصل می‌پردازیم:

اصل استقرای ضعیف: اگر m عددی صحیح و P(n) ویژگی مشخصی (یا حکم یا گزاره‌ای) در مورد عدد طبیعی (یا حسابی) n باشد به‌طوری که:

الف) P(m) برقرار است.

ب) اگر $k \geq m$ و P(k) برقرار باشد، آن‌گاه P(k+1) برقرار است.

در این صورت به ازای هر عدد صحیح $n \geq m$، P(n) برقرار است.

به‌طور معمول m را ابتدای استقرا می‌نامند. در اکثر مسائل $m=۱$ است و مایلیم برای هر عدد طبیعی n برقراری P(n) را ثابت کنیم.

با توجه به اصل استقرای ضعیف دو چیز باید ثابت شود:

۱. برقراری P(۱)؛

۲. نتیجه‌گیری P(k+1) از P(k).

در اصل فوق P(k) را «فرض استقرا» می‌نامند و P(k+1) را «حکم استقرا» می‌نامند. برای اثبات بخش (۲)، معمولاً برقراری P(k) را فرض می‌گیرند و P(k+1) را از آن طی مراحلی و با تمهیداتی نتیجه می‌گیرند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

- دانشمندان دارویی را در چند مورد آزمایش می‌کنند و هنگامی که اثر شفابخش آن را می‌بینند، حکم کلی می‌کنند که آن دارو برای درمان این بیماری مفید است.
- سگ، گربه، خرگوش، شتر، انسان و... هنگام جویدن خوراک، فک زیرین خود را حرکت می‌دهند. سپس این حکم را به نحو کلی عمومیت می‌بخشیم و می‌گوییم: «همهٔ حیوانات هنگام خوردن، فک پایین خود را حرکت می‌دهند.»

دربارهٔ مثال دوم از لحاظ منطقی می‌توان گفت که ممکن است طبیعت استثناهایی داشته باشد و حکم کلی ما درست نباشد. این نوع استدلال کاربرد فراوانی در علوم‌تجربی و ریاضیات دارد و مبنای اعتماد به علوم‌تجربی است. در مثال زیر کاربرد استقرای ضعیف در ریاضیات را مشاهده می‌کنید:

$$۱+۲+۳+\ldots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$P(n):۱+۲+۳+\ldots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$P(۱):۱=\frac{۱(۱+۱)}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱$$

$$P(k):۱+۲+۳+\ldots+k=\frac{k(k+۱)}{۲}\quad \text{(فرض استقرا)}$$

$$P(k+۱):۱+۲+۳+\ldots+(k+۱)\quad \text{(حکم استقرا)}$$
$$=\frac{(k+۱)((k+۱)+۱)}{۲}$$
$$=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$$

می‌خواهیم از درستی P(k) درستی P(k+1) را نتیجه بگیریم. برای این منظور به طرفین برابری فرض عبارت (k+1) را اضافه می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{اثبات:}\ \underbrace{۱+۲+۳+\ldots+k}_{\text{طبق فرض استقراء}}+(k+۱)=\frac{k(k+۱)}{۲}+(k+۱)$$
$$=\frac{k(k+۱)+۲(k+۱)}{۲}$$
$$=\frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$$

استقرای قهقرایی: این استقرا برگرفته از استقرای ضعیف است. گاهی به سادگی می‌توان از برقراری P(k+1) برقراری P(k) را نتیجه گرفت و ثابت کرد که مجموعهٔ kهایی که P(k) برقرار است، نامتناهی است.

اصل استقرای قهقرایی: فرض کنید P(n) به ازای $n\geq m$ تعریف شده باشد و:

الف) به ازای هر $n\geq m$ اگر P(n) آن‌گاه P(n−۱)؛

ب) مجموعه nهایی که P(n) برقرار است، نامتناهی است.

در این صورت به ازای هر عدد صحیح $n\geq m$، P(n) برقرار است.

۲. استقرای تام (قوی)

اگر افراد و یا چیزهایی که مورد استدلال قرار می‌گیرند، محصور و معدود باشند و هر یک جداجدا مورد بررسی قرار گرفته باشند و پس از آن حکم کلی صادر شود، استدلال از نوع تام است. دو مثال زیر نمونه‌هایی از کاربرد استدلال استقرای تام است:

- مدار یک‌یکِ ستارگان منظومهٔ شمسی را ملاحظه می‌کنیم و می‌بینیم که بیضی است. آن‌گاه حکم می‌کنیم که همهٔ ستارگان منظومهٔ شمسی دارای مدار بیضی‌اند.

● معلم در کلاس از یک یکِ دانش‌آموزان می‌پرسد که آیا تمرین خود را حل کرده‌اند یا نه، و چون می‌بینند که همه حل کرده‌اند، اعلام می‌کند که «همه تمرین خود را حل کرده‌اند».

این نوع استقرا نتیجهٔ درستی دارد، اما به‌دلیل محدود و کوچک بودن موضوعات کاربرد چندانی ندارد. در ریاضیات نیز گاهی اوقات نتیجه‌گیری $P(k+1)$ تنها با استفاده از $P(k)$ ممکن نیست، بلکه می‌توان از برقراری $P(m)$ تا $P(k)$ نتیجه گرفت که $P(k+1)$ برقرار است.

مانند استقرای ضعیف، اصلی به نام اصل استقرای قوی مطرح می‌شود:

اصل استقرای قوی: اگر m عددی صحیح و $P(n)$ ویژگی مشخصی (یا حکم یا گزاره‌ای) در مورد عدد طبیعی (یا حسابی) n باشد، به‌طوری که:

الف) $P(m)$ برقرار است.

ب) اگر $k \geq m$ و اگر $P(m)$، $P(m+1)$، ... و $P(k)$ برقرار باشند، آن‌گاه $P(k+1)$ برقرار است.

در این صورت به ازای هر عدد صحیح $n \geq m$، $P(n)$ برقرار است.

قیاس

قیاس مهم‌ترین و قاطع‌ترین شکل استدلال و تنها راه رسیدن به یقین است. این استدلال از کلی به جزئی و مرکب است از حداقل دو قضیه، به نحوی که با دانستن درستی آن دو قضیه، بدون هیچ تردیدی قضیهٔ دیگری به‌نام نتیجه به‌دست می‌آید. قیاس مجموع قضایایی است که هرگاه آن‌ها را قبول کنیم، ناچار باید نتیجهٔ آن‌ها را نیز قبول کنیم؛ چون در غیر این‌صورت گرفتار تناقض خواهیم شد. این نوع استدلال در کتاب‌های جبر و احتمال سال سوم ریاضی، هندسهٔ ۱ و هندسهٔ ۲ زیرعنوان «**استدلال استنتاجی**» مطرح شده است. مشهورترین مثال‌هایی که در منطق دربارهٔ قیاس مطرح می‌شوند، مثال‌های زیر هستند:

● سقراط انسان است، هر انسان فانی است، پس سقراط فانی است.

● هوا جسم است، هر جسمی جرم و وزن دارد، پس هوا جرم و وزن دارد.

بنابراین می‌توانیم استدلال قیاسی را به این صورت تعریف کنیم: «استدلال قیاسی، استدلالی است از کلی به جزئی که اگر مقدمات آن صادق باشد، نتیجهٔ به‌دست آمده حتماً صادق است.»

قیاس دو جنبه دارد: یکی صورت و دیگری ماده. منظور از صورت قیاس، همان قالب‌های منطقی است که شکل و چارچوب استدلال را تشکیل می‌دهند که از این نظر مانند ریاضیات است. برای مثال، فرمول‌ها و روابط ریاضی که در مسائل ظاهر می‌شوند، همان قالب و صورت هستند. اما منظور از ماده در قیاس، مقادیری است که به‌جای متغیرها و مجهولات در معادلات و روابط قرار می‌دهیم. برای مثال، تابع $f(x)=2x-1$ را در نظر بگیرید. این رابطه همان قالب و صورت است و مقادیری که به‌جای x گذاشته می‌شوند، همان مادهٔ این صورت نام دارند. در کل می‌توانیم یکی از مهم‌ترین صورت‌های قیاس را که شکل اول قیاس نام دارد، به این‌صورت بیان کنیم: «هر الف ب است و هر ب پ است، پس هر الف پ است.»

ماده چیزی است که جای الف، ب و ج گذاشته می‌شود که می‌تواند انسان، فانی، هوا و... باشد. در محاوره و در آثار ادبی، غالباً قیاس به معنی تمثیل به‌کار می‌رود؛ مانند اینکه: هر انسانی ناطق است، هر ناطقی میرنده است، پس هر انسانی میرنده است.

همچنان که در ریاضی «$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$» قالب و شکل است و مقادیری که به‌جای a و b گذاشته می‌شوند، مادهٔ آن صورت نام دارند؛ برای مثال: $(2+3)^2=4+9+12=25$.

منابع

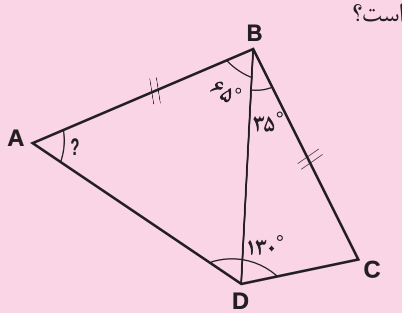
۱. خوانساری، محمد (۱۳۸۳). منطق صوری. آگاه.
۲. مظفر، محمدرضا (۱۳۹۲). منطق. دارالعلم.
۳. عالمی، روح‌الله (۱۳۹۲). منطق. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی.
۴. بابلیان، اسماعیل (۱۳۷۶). مباحثی در ریاضیات گسسته. مبتکران.

پرسش‌های پیکارجو!

در شکل مقابل داریم:

$AB=BC$، $A\hat{D}C=130^\circ$، $A\hat{B}D=65^\circ$ و $C\hat{B}D=35^\circ$.

اندازهٔ $B\hat{A}D$ چند درجه است؟



الف) 60°

ب) 57°

ج) $57/5^\circ$

د) $67/5^\circ$

هـ) 55°